Exposé de René Thom*
au Colloque International de Cerisy :
"Logos et théorie des Catastrophes"

(7-17 septembre 1982 [1])

Ma conférence sera consacrée [1] à des recherches très actuelles dans mon évolution. Ce dont je vais parler aujourd'hui, sera plutôt une rétrospective, un tracé de ma trajectoire intellectuelle. Je dois dire dès l'abord combien je suis honoré d'être ici, d'être au fond un des premiers scientifiques à avoir pénétré dans ce haut lieu de l'intellectualité française qu'est le château de Cerisy et j'apprécie pleinement l'honneur qui m'est ainsi fait.

Paul Valéry je crois, raconte dans un de ses Cahiers qu'un jour il reçut la visite d'Einstein; il relate la très longue conversation qui s'installe entre les deux hommes; Valéry était évidemment très curieux de connaître comment pouvait fonctionner un aussi grand esprit et il lui a posé toutes sortes de questions sur la manière dont il travaillait. Il lui a dit : enfin maître, comment faites-vous? Est-ce que vous vous relevez la nuit pour écrire vos idées dans des petits carnets? Et Einstein a laissé tomber: " Des idées, on en a deux ou trois dans sa vie. " Eh bien, je crois que c'est de cette formule que je vais partir; c'est sur elle que je vais m'appuyer pour essayer de décrire la différence qu'il peut y avoir entre un esprit de formation scientifique et un esprit de formation littéraire. Les esprits de formation littéraire sont en général pleins d'idées; ils sont extrêmement étincelants, mais les étincelles durent peu, elles s'éteignent assez rapidement. Certes, il est plaisant de voir les feux d'artifice. Au contraire, les esprits de type scientifique – dans la mesure où on peut les comparer à Einstein – témoignent souvent de cette espèce d'évolution lente de quelques principes générateurs. L'évolution spirituelle d'un tel type de créateur est liée à quelques idées clés qui, en général, sont de

* Ce texte est reproduit ici avec l'aimable autorisation de Jean Petitot organisateur du Colloque de Cerisy.

nature assez abstraite et peuvent éventuellement prendre au cours du temps des formes un peu plus spécifiques et un peu plus précises par une espèce de ramification lente. Au contraire, pour le brillant esprit littéraire dont je parlais tout à l'heure, c'est plutôt une espèce de ramification générale et instantanée. Il y aurait là une sorte de dynamique de la générativité des idées qu'il serait intéressant d'étudier dans la perspective d'une typologie des deux cultures selon C. P. Snow : la culture scientifique et la culture littéraire.

Je disais qu'il n'y avait au fond guère plus qu'un petit nombre d'idées qui peuvent guider la créativité chez les scientifiques. Je pense que c'est effectivement mon cas et j'ai au cours de ma carrière rencontré peu de principes mais des principes qui, par la suite, m'ont servi, m'ont beaucoup aidé à formuler ces idées sous une forme un peu plus explicite et peut-être de ce fait un peu plus contestable.

Je vais essayer de retracer assez rapidement mon évolution intellectuelle. Sociologiquement parlant, je suis un mathématicien. Comment s'est décidée ma vocation mathématique? C'est une chose pas très nette, étant donné qu'au cours de mes études secondaires, j'étais aussi doué pour les disciplines littéraires que pour les disciplines scientifiques. Mais en 1939, au moment où la guerre approchait, c'était l'opinion générale qu'il valait mieux faire des mathématiques pour entrer dans l'artillerie que d'être condamné à l'infanterie où on allait à une mort certaine. Cela a contribué à m'orienter vers les mathématiques. J'exagère un peu. En réalité, il y a eu une rencontre qui a été assez décisive, c'est celle avec la géométrie euclidienne en classes de 3e, 2e, où réellement j'ai pris goût au mode de pensée et à la démonstration géométriques. J'avais mis mon point d'honneur à trouver les solutions à tous les problèmes concevables en matière de géométrie élémentaire, en matière de géométrie du triangle, ce qui fait que, depuis, j'ai conservé pour la géométrie euclidienne une faiblesse que mes collègues et confrères mathématiciens ne me pardonnent pas.

J'ai donc fait le bachot de mathélèm, puis par relations on m'a envoyé au lycée Saint-Louis à Paris où j'ai suivi la filière traditionnelle. Je suis entré à l'École Normale en 1943 sous l'occupation allemande. J'ai fait des études tout à fait standard et je suis sorti de l'École en 1946 avec l'agrégation, pas très brillamment, puis j'ai suivi mon maître Henri Cartan à l'université de Strasbourg, où j'ai commencé des recherches qui devaient porter sur les fonctions de plusieurs variables complexes. A cette époque on s'intéressait beaucoup aux travaux d'un mathématicien japonais qui s'appelait Oka et qui a en effet fourni des idées tout à fait nouvelles et originales dans cette branche des mathématiques. J'ai essayé de travailler sur ces questions mais, au bout de peu de temps, je suis tombé sur une difficulté. Il s'agissait de résoudre un certain problème, le problème de Cousin, où il faut construire une fonction globale à partir de pièces et de morceaux qu'on définit localement sur des voisinages dans un espace; il s'agit de rabibocher tous ces morceaux ensemble en un objet unique. Oka avait très bien vu qu'on se heurtait à une difficulté de nature topologique, qu'on appelle en termes modernes une obstruction, et qu'il fallait que cette obstruction soit nulle pour que le problème ait une solution. Mais ce problème était un problème purement différentiable; il n'avait rien à faire avec celui de nature analytique qui était proposé au départ. Alors je suis revenu vers mon maître Henri Cartan et je lui ai dit comment se fait-il qu'on essaye de résoudre dans l'analytique des problèmes qu'on ne sait pas résoudre dans le différentiable? Alors, ça m'a décidé à abandonner l'analytique dans une certaine mesure et à me consacrer un peu à la topologie algébrique qui se développait à ce moment-là.

Ici, je vais essayer de faire un effort pour les non-techniciens, je m'en excuse auprès des mathématiciens qui m'écoutent. Il faut bien se rendre compte qu'entre les années 1935 et 1950, grosso modo, il y a eu un développement énorme de cette nouvelle branche des mathématiques qui s'est appelée la topologie algébrique. Au départ, on avait étudié des objets géométriques tels qu'on peut les réaliser intuitivement dans notre espace à trois dimensions: il y a les courbes qu'on appelle pédantiquement des variétés de dimension un, il y a les surfaces qui sont les variétés de dimension deux. On a beaucoup étudié les courbes et les surfaces au cours du XIXe siècle et puis, vers la fin du XIXe siècle, on a commencé à se rendre compte progressivement qu'il ne fallait pas se borner aux trois dimensions mais qu'on pouvait aussi bien faire de la géométrie à quatre, à cinq, à n dimensions, et, éventuellement, comme on l'a fait à partir de Hilbert, qu'on pouvait même faire de la géométrie dans un espace à une infinité de dimensions.

C'était un très beau programme de faire sauter, en quelque sorte, ce verrou dimensionnel qui est donné dans notre intuition. Seulement, bien entendu, les modes de raisonnement qu'on pouvait utiliser dans ces espaces pluri-dimensionnels devaient être fondamentalement neufs parce que, s'il est vrai qu'on peut développer une intuition géométrique dans des espaces à un assez grand nombre de dimensions, celle-ci ne peut plus être formalisée en un certain sens. Tel mathématicien sera capable de voir par habitude ou par entraînement dans l'espace à quatre ou cinq dimensions, mais tel autre en sera parfaitement incapable. Si donc on veut réaliser un consensus en matière de preuve, il faut utiliser des arguments qui ne fassent pas intervenir l'intuition spatiale et c'est la raison pour laquelle on a dû développer au cours des années qui se sont étendues de 1930 à 1940 toute une série de nouvelles techniques, d'ailleurs plus ou moins héritées des œuvres fondatrices d'Henri Poincaré des années 1880, lesquelles ont permis de définir des invariants topologiques pour les espaces multidimensionnels. Ces invariants de nature topologique c'est en gros quelque chose qui joue le rôle du nombre d'anses avec lequel on peut construire une surface. Prenez par exemple une sphère. Si vous lui ajoutez une anse, ça devient un tore. Si vous lui ajoutez une deuxième anse, cela devient ce qu'on appelle en allemand la Bretzelfläche, etc. On peut classifier de cette manière par le nombre d'anses toutes les surfaces orientables compactes, c'est ce qu'on appelle le *genre* en termes mathématiques. Eh bien, les invariants qu'on peut fabriquer de cette manière-là, on a pu les construire à cette époque grâce à la théorie de l'homologie puis, ultérieurement, à celle de la cohomologie. A cela il faut ajouter qu'on a créé également toute une série de nouveaux objets extrêmement importants et fondamentaux pour notre représentation des objets géométriques. Je fais ici allusion à ce qu'on appelle les espaces de vecteurs tangents, c'est-à-dire les espaces qui se généralisent en espaces fibrés. Ces objets qui avaient été plus ou moins aperçus intuitivement par les mathématiciens antérieurs comme Poincaré et Elie Cartan, n'ont reçu de définition stricte que dans les années 30 et 40. Je crois que la première définition explicite de la notion de variété différentiable, qui est une notion qui généralise celle d'espace euclidien à un nombre arbitraire de dimensions à des espaces pouvant éventuellement se refermer sur eux-mêmes et avoir de la topologie interne comme les surfaces, la première définition rigoureuse date des années 28, dans le livre de Vehlen-Whitehead. C'est à ce moment-là qu'on est arrivé pour la première fois à une définition rigoureuse des espaces multidimensionnels : entre les années 33 et 37 le mathématicien américain Whitney a écrit des papiers fondateurs pour la théorie de ce genre d'espaces.

Puis cette topologie algébrique s'est développée de manière extrêmement rapide entre les années 35 et 50, avec toute une série de nouvelles notions, les opérations cohomologiques, les classes caractéristiques, etc., je ne vais pas vous entraîner dans toute cette technique. Je dirai simplement ceci : j'entends constamment mon confrère et collègue Dieudonné dire que les mathématiques ont fait plus de progrès dans les vingt dernières années que pendant toute la période antérieure de l'histoire ; je serais tenté de dire quant à moi que c'est peut-être vrai d'un point de vue quantitatif. On a en effet fait des progrès dans les vingt dernières années, mais ces progrès ont été de diverse nature. D'abord il y a eu beaucoup de progrès dans les énigmes historiques, comme les problèmes de type diophantiens en théorie des nombres. Tout récemment, on a résolu la structure des groupes finis simples. C'est évidemment un très grand progrès du point de vue conceptuel, mais je ne pense pas que ce soit quelque chose de comparable à l'explosion conceptuelle qui a suivi l'établissement de la topologie algébrique entre les années 35 et 50 où, vraiment, on a ouvert des horizons neufs avec des techniques neuves. Je n'ai pas l'impression que dans les années qui ont suivi, de 60 à 80 disons, il y ait eu une explosion comparable en mathématiques. Ce qui fait que, quant à moi, je pense que les chercheurs qui se sont lancés en mathématiques postérieurement à 60 ont eu infiniment plus de mérite que des gens comme moi qui sont tombés juste au bon moment. Je suis entré au CNRS, et j'ai pu travailler sur des sujets de topologie algébrique. Mon premier travail a traité de ce qu'on appelle la théorie de Morse, c'est-à-dire essentiellement de la relation qui existe entre la topologie d'un espace et les singularités d'une fonction définie sur cet espace. Il y a comme un aspect philosophique dans la théorie de Morse que je voudrais expliquer rapidement. Un espace c'est quelque chose d'assez compliqué, on a du mal à le dominer globalement. Quand on veut en étudier un, un des moyens pour y arriver est d'y définir des êtres globaux, par exemple une fonction numérique. Autrement dit, on projette, on aplatit l'espace sur l'axe réel, sur l'axe de la valeur de la fonction. Dans cette opération d'aplatissement, l'espace ne se laisse pas faire : il réagit en créant des singularités pour la fonction. Les singularités de la fonction sont en quelque sorte les vestiges de la topologie qu'on a tuée : on tue la topologie de la variété en l'appliquant dans l'axe réel, mais la topologie résiste, elle "crie", et ses cris se manifestent par l'existence de points critiques. D'où la notion de point singulier qui a joué un rôle tout à fait fondamental dans ma pensée ultérieure.

Je vous donnerai plus tard un exemple simple de ce type d'objet qu'est une singularité. Quoi qu'il en soit, je me suis consacré dans ma thèse à des questions d'espaces fibrés et de classes caractéristiques, et puis quatre ans plus tard, en 54, j'ai publié un papier assez important qui s'appelle "Quelques propriétés globales des variétés différentiables" où j'ai étudié essentiellement le problème suivant : quand est-ce qu'une variété de dimension n est le bord d'une variété à bord de dimension $n+1$? C'est ce qu'on a appelé depuis le problème du cobordisme, qui permet de définir une relation d'équivalence entre variétés, par conséquent de plaquer sur l'ensemble des variétés de dimension n une structure de groupe et de faire de tous ces groupes une algèbre avec la multiplication définie par le produit topologique, l'algèbre de cobordisme que j'ai pu déterminer dans quelques cas.

Je donne ici un exemple de singularité : si vous prenez une chambre à air gonflée, la surface que vous obtenez de cette manière-là est ce qu'on appelle un tore; c'est le produit de deux cercles, un cercle méridien et un cercle parallèle. Si vous prenez une fonction numérique, par exemple la fonction hauteur, celle-ci va admettre quatre points critiques : il y a le minimum de la hauteur, le maximum, et entre les deux, il y a ce qu'on appelle les points col. Ces quatre points critiques symbolisent en quelque sorte les invariants topologiques associés à la surface. Ces invariants topologiques, tout d'un coup, par le seul fait qu'on a construit une fonction sur la surface se trouvent symbolisés par des singularités locales. Il y a là un phénomène assez intéressant : des objets de nature abstraite et globale deviennent en quelque sorte codés, pour employer le jargon moderne, en des singularités d'un objet associé. Il y a comme un codage de l'objet global dans des singularités de l'entité codante.

Pour en revenir au problème du cobordisme – qui est de savoir quand deux variétés peuvent être déformées l'une dans l'autre sans qu'à aucun moment dans cette déformation il n'y ait dans l'espace obtenu de singularités – c'est ce problème, que j'ai pu au moins partiellement résoudre, qui m'a valu de recevoir en l'année 58 la médaille Fields qui est, comme disent certains, l'équivalent du prix Nobel en mathématiques. Je dois dire que, dans cette affaire, j'ai eu beaucoup de chance, je suis tombé au bon moment. On a beaucoup discuté de savoir si ces grandes distinctions comme le prix Nobel, etc. n'avaient pas un effet fâcheux sur l'évolution ultérieure des savants qui les reçoivent: il y a beaucoup de gens qui ont soutenu cette théorie. Dans mon cas, il est probable qu'en effet la médaille Fields a diminué ma fécondité mathématique, parce que ça m'a assuré une certaine sécurité matérielle et, si vous n'avez pas le couteau sur la gorge pour travailler en mathématiques, il faut bien du courage pour s'y mettre, parce que, malgré tout, les mathématiques, c'est difficile. C'est difficile et c'est épuisant pour l'esprit. Les périodes de créativité mathématique sont des périodes extrêmement astreignantes pendant lesquelles on vit dans un état proche de l'aliénation, on est complètement capturé par le problème, on peut difficilement s'en abstraire. Il est certain que le travail mathématique est quelque chose de tout à fait exigeant. Cette distinction, en m'assurant une sécurité matérielle qui s'est concrétisée quelques années plus tard par ma venue à l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette, a peut-être diminué ma production mathématique. Mais d'un autre côté elle m'a permis de me lancer dans des aspects qui en un certain sens m'intéressaient plus, en particulier dans des problèmes concernant les applications et maintenant dans les recherches sémiotico-philosophiques dont je vous parlerai dans ma Conférence.

Après 58, j'ai essayé de continuer à faire de la topologie algébrique, mais je m'en suis dégoûté assez rapidement, étant tombé sur des problèmes relativement difficiles que des collègues plus jeunes réussirent à résoudre. Je me suis tourné vers un autre domaine qui avait déjà été exploré par le mathématicien Whitney dont je parlais tout à l'heure, à savoir celui des applications différentiables. Il y a là de nouveau une question de technique. Je parlais tout à l'heure de la notion de fonction. C'est une notion qui a mis énormément de temps à se constituer dans l'esprit des hommes. Elle n'était pas connue des mathématiques antiques. Elle s'est lentement élaborée après les travaux des algébristes arabes et surtout des algébristes italiens du XVIe siècle qui ont étudié la résolution des équations du degré trois et quatre. Je suis de ceux qui croient que la science moderne doit son origine à sa maturation lente. C'est à partir du moment où on a eu l'idée nette d'une correspondance entre deux grandeurs décrite explicitement par une formule algébrique, comme la loi de la chute des corps de Galilée, qu'on a pu réellement comprendre ce que c'est que la légalité scientifique. C'est là je crois un point important pour l'histoire des idées. Le mérite historique des mathématiciens est peut-être simplement de dégager progressivement ces concepts fondamentaux qui sont implicites dans l'esprit et qui n'arrivent à l'explicitation qu'à la suite de secousses historiques successives. La chose curieuse est que, dans l'histoire des sciences, on donne toujours beaucoup plus de mérite au physicien qu'au mathématicien. Je m'en désole en tant que mathématicien, mais c'est indubitable. La chose est ce qu'elle est. Tout le monde a entendu parler d'Einstein, peu de gens ont entendu parler de Riemann. C'est un fait sociologique. On n'y peut rien.

Pour en revenir à la notion de fonction, qu'est-ce qui en fait l'intérêt essentiel d'un point de vue philosophique ? Eh bien, la nature telle qu'elle se présente à nous est toujours un mélange de déterminisme et d'indéterminisme. Il y a toujours un aspect déterminé et un aspect indéterminé dans les choses. L'intérêt essentiel de la notion de fonction est de séparer brutalement ces deux aspects en mettant l'aspect indéterminé dans ce qu'on appelle la variable et l'aspect déterminé dans la correspondance qui fait passer de la valeur de la variable, la valeur de l'argument x, à la valeur de la fonction y. On a donc poussé à l'extrême cette opposition déterminisme/indéterminisme en mettant tout l'indéterminisme dans une variable qui est parfaitement arbitraire, excepté qu'elle doit varier dans un espace, et en rigidifiant au contraire de manière stricte la loi qui fait passer de x à y. Je ne parle pas ici de fonction stochastique, je parle de fonction au sens ordinaire du terme.

La notion d'application est tout simplement une généralisation lorsque x et y ne sont plus des valeurs numériques, mais des points d'un espace euclidien ou des points de variétés différentiables. Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ est par exemple une application du plan de coordonnées (x, y) dans la droite réelle $\mathbb{R}$. De manière générale, on fabrique des applications d'un espace de dimension n dans un espace de dimension p. Si $x_1 \dots x_n$ sont les coordonnées du premier espace, qu'on appelle espace source, et $y_1 \dots y_p$ les coordonnées du second espace, qu'on appelle espace but, alors si je me donne un système de p fonctions $y_j = f_j(x_1 \dots x_n)$, je définis une loi qui va envoyer tout point x de l'espace $\mathbb{R}^n$ en un point y de l'espace $\mathbb{R}^p$. C'est cela qu'on appelle une application. Lorsque les fonctions f_j sont différentiables avec des dérivées partielles continues, on dit que l'application est différentiable. On la dit analytique si les fonctions sont analytiques, polynômiale si les fonctions sont polynômiales, etc.

Le problème auquel je me suis intéressé vers les années 60 a une assez longue histoire. Le premier aspect en date de la fin du XIXe siècle, avec les travaux de l'école italienne de géométrie algébrique. Les Italiens s'étaient donné comme problème d'étudier les surfaces algébriques, c'est-à-dire les surfaces définies par des équations polynomiales. Pour cela ils procédaient un peu comme j'ai fait ici pour le tore. Si vous avez une surface plongée dans l'espace à trois dimensions et définie par une équation, pour l'étudier on la projette sur le plan (x, y) et on regarde ce qu'on appelle le contour apparent. Là aussi il y a des points qui ne se projettent pas régulièrement. Ce sont les points critiques. Ils donnent naissance par projection à une courbe qu'on appelle le contour apparent, courbe des valeurs critiques, et une bonne partie de la topologie de la surface initiale est lisible sur ce contour apparent. Un des grands problèmes, qui a un aspect philosophique sur lequel il faudra revenir, est alors le problème suivant : connaissant tous les contours apparents d'une surface selon toutes les directions possibles, peut-on reconstituer celle-ci? Eh bien les géomètres algébristes italiens avaient observé que les contours apparents d'une surface présentaient des singularités appartenant presque toujours à un catalogue fini. Je ne veux pas rentrer dans des détails trop techniques, mais, en gros, il n'y avait qu'un petit nombre d'accidents qui se présentaient pour une projection, comme on disait, générique. S'il y avait des accidents trop exceptionnels, on déplaçait un petit peu la direction de projection et on ne récoltait que des singularités génériques. Ces singularités génériques, dans ce cas-là, étaient tout simplement des points doubles du contour apparent et éventuellement des rebroussements. D'où la propriété, qui était donc connue des géomètres algébristes italiens, que pour presque toute projection, le contour apparent ne présente que des courbes régulières se coupant transversalement et des rebroussements de type banal, avec une équation locale de type $y^2 = x^3$. Je ne sais pas si ce théorème avait été établi rigoureusement, les géomètres algébristes italiens ne se préoccupant guère de rigueur, c'est bien connu. Il l'a été par Whitney dans le cas d'une application différentiable plan dans plan quelconque avec une topologie convenable sur l'espace fonctionnel. On montre que pour presque toute application l'image du lieu critique (qu'on peut définir intrinsèquement) – le lieu des valeurs critiques – ne présente qu'un nombre fini de singularités appartenant à un catalogue fini. D'où cette idée, dont l'importance philosophique ne peut pas être négligée, que la réalité contient en quelque sorte une infinité d'accidents mais que si l'on se restreint à une situation générique, il n'y a dans le meilleur des cas qu'un nombre fini d'accidents qu'on peut répertorier et classifier. C'est ce genre de problèmes que j'ai commencé à étudier vers les années 60 et cela m'a conduit d'ailleurs à me préoccuper de leurs applications possibles. J'étais encore professeur à Strasbourg à l'époque et j'ai fait en particulier quelques petites expériences avec les caustiques en optique avec des miroirs sphériques pour essayer de bien voir les singularités présentées génériquement.

C'est une chose d'ailleurs tout à fait étonnante du point de vue épistémologique que cette affaire des caustiques. Il y a à peu près trois siècles, avec Snell et Descartes, qu'on a commencé à étudier le comportement des rayons lumineux et qu'on a eu l'idée de ce qu'est une caustique, c'est-à-dire l'enveloppe des rayons lumineux qui sont réfléchis par un miroir ou qui traversent un dioptre ou un système de dioptres. On a constitué tout un corps de doctrine qui s'appelait l'optique géométrique, mais le but de cette branche était simplement de réduire les aberrations des appareils. Il y avait des appareils optiques qui étaient toujours centrés sur un axe, on étudiait ce qui se passait au voisinage de l'axe et le problème était de réduire les aberrations, de les rendre aussi petites que possible. J'ai étudié les caustiques dans un esprit tout à fait différent. J'ai voulu savoir comment se présentait au contraire la caustique la plus générale, quelles singularités elle avait, etc. Je suis parti de l'idée naïve qu'il fallait prendre le plan initial traversé par les rayons lumineux, considérer la trajectoire de ceux-ci comme définissant une application sur l'écran et par conséquent étudier les singularités génériques de cette application. Je n'ai pas tardé à m'apercevoir – mais il m'a fallu, je dois le reconnaître, quand même un certain temps – que ce n'était pas suffisant et que du fait que les rayons lumineux satisfont à un principe variationnel, (le principe de Fermat, qui dit qu'entre deux points de sa trajectoire le rayon lumineux choisit toujours une trajectoire dont la durée de parcours est extrémale ce qui crée des contraintes sur l'application des valeurs initiales sur l'écran) la théorie des singularités doit être modifiée. C'est cette modification qui m'a conduit dans les années 63-64 à ce qui est devenu la théorie des catastrophes élémentaires. C'est dans les années 64-65 que j'ai commencé mes premiers travaux sur ce sujet, publiés en 1966. J'y ai donné la classification sans preuve évidemment, des singularités génériques des fonctions sur un espace de contrôle de dimension quatre. C'est devenu plus tard le théorème fondateur de la théorie des catastrophes élémentaires. 64-66, c'est aussi l'époque où j'ai rédigé mon livre "Stabilité structurelle et Morphogenèse". Après divers aléas avec l'éditeur, ce livre n'a été publié que fin 72, mais un certain nombre de copies ont circulé souterrainement, en particulier à Warwick où le livre a suscité un grand intérêt. Je dois beaucoup à Christopher Zeeman, le premier qui a réalisé toute l'importance de ce type de notions et en a donné toute une série d'applications.

Le problème des applications s'est posé de la manière suivante. Au départ, je n'avais en vue que les applications à l'optique géométrique, c'est-à-dire la théorie des singularités de caustiques, ce que, en terminologie moderne, on appelle les projections de variétés lagrangiennes. Mais, par la suite, dans les années 62-63, je me suis intéressé à la biologie, en particulier à l'embryologie. J'ai eu quelques discussions avec des collègues biologistes, je me suis un peu instruit dans ce domaine, et il y a eu une idée qui m'a particulièrement fasciné, l'idée, proposée par Max Delbruck en 49 dans un colloque au C.N.R.S., que la différenciation cellulaire pouvait être considérée comme un changement de phases, c'est-à-dire que les cellules d'un être vivant pouvaient adopter divers régimes métaboliques ayant la capacité de se perpétuer d'une cellule mère à une cellule descendante et que, par conséquent, le choix de ces régimes métaboliques pouvait être traité un peu selon l'algorithme des changements de phases en physique. Bien entendu, Max Delbruck ne parlait pas explicitement des changements de phases. Mais j'ai essayé de traiter les grands accidents de l'embryologie des vertébrés comme des accidents morphologiques liés à des changements brutaux, catastrophiques, des régimes métaboliques cellulaires. Cela m'a conduit à écrire ce livre "Stabilité structurelle et Morphogenèse" en 66.

L'idée d'une modélisation biologique, je la dois d'ailleurs aussi dans une certaine mesure à Christopher Zeeman qui, en 61, avait publié un article qui s'appelait "Topology of the brain" où il avait montré les grandes possibilités théoriques de modélisation mathématique des activités biologiques les plus complexes. Cet article m'avait beaucoup impressionné à l'époque. Depuis j'ai remarqué que dans les œuvres complètes de Riemann, il y a à la fin 5 ou 6 pages de considérations philosophiques dans lesquelles Riemann explique qu'en ce qui concerne les rapports entre l'esprit et la matière on peut concevoir que, si une activité cérébrale correspond à une idée que nous pensons, eh bien la *signification* de l'idée doit être définie par la *forme* du processus physico-chimique correspondant. Autrement dit, il y a dans Riemann – c'est écrit explicitement – cette façon à mon avis centrale, tout à fait simple et puissante, de s'expliquer le fameux parallélisme psycho-physique. Cette idée à mon sens n'a jamais été exploitée de manière systématique. Elle est reprise dans l'article de Zeeman, mais je pense que Zeeman l'a retrouvée telle quelle par lui-même. Quoi qu'il en soit, les possibilités de modélisation géométrique d'un grand nombre de phénomènes naturels me sont alors apparues pleinement.

Je dois dire pour être complet que, vers les années 60-61, j'étais aux États-Unis et que j'ai fait la connaissance du groupe de dynamique qui à l'époque travaillait dans la région de Baltimore, sous la direction de Lefschetz. Lefschetz avait introduit aux U.S.A. la notion de stabilité structurelle d'un système dynamique, qui avait été créée entre 30 et 40 par les mathématiciens soviétiques, Andronov, Pontryagine et autres. Il a très bien compris l'importance capitale de cette notion et il a fait beaucoup pour développer cette théorie dans les milieux occidentaux. Le premier succès dans cette voie a été obtenu avec le théorème de Peixoto disant que les champs de vecteurs sur une surface orientable compacte sont presque tous structurellement stables. Je ne définirai pas ici la notion de stabilité structurelle au sens technique du terme. Elle veut dire intuitivement ceci. Si vous avez une dynamique dans un espace, elle y définit un champ de trajectoires, ce qu'on appelle en termes modernes un feuilletage, éventuellement avec singularités. Une telle dynamique est structurellement stable si, en la perturbant légèrement, la nouvelle partition de l'espace en trajectoires est topologiquement isomorphe, homéomorphe, à la partition initiale. Autrement dit, on ne change pas l'aspect global du système par une petite perturbation. Cette notion de stabilité structurelle des systèmes dynamiques est évidemment du même type que celle (dont je parlais tout à l'heure) de stabilité structurelle d'une projection quand on perturbe légèrement la direction de projection ou le plongement d'une surface. Son intérêt est qu'elle permet de classifier les régimes asymptotiques stables du système. Si vous avez un système dynamique dans un espace et si vous suivez la trajectoire d'un point, cette trajectoire finit en général par s'enrouler autour de quelque chose, elle ne remplit plus tout l'espace, elle tend vers un certain sous-ensemble et on peut espérer que, au moins génériquement, ces sous-ensembles ne sont pas trop compliqués. Au départ une idée naïve est qu'il n'y a que deux types de tels sous-ensembles réellement importants, les points et les trajectoires fermées. Évidemment, elle se révèle fausse mais elle a quand même un certain contenu de vérité sur lequel je ne m'étendrai d'ailleurs pas ici. En tout cas, si vous tendez vers un point, vous tendez vers un état d'équilibre stable, si vous tendez vers une trajectoire fermée, vous obtenez à la limite un mouvement périodique. L'idée simple était que, étant donnée une dynamique dans un espace, on pourrait espérer classifier tous les types de régimes asymptotiques stables qui lui seraient associés. La notion correspondante est une notion délicate. Dans mon livre, j'ai appelé cela *attracteur* faute de pouvoir en donner une définition rigoureuse. J'ai donné une définition empruntée à Smale qui n'est peut-être pas tout à fait satisfaisante. A l'heure qu'il est le problème de la définition des régimes asymptotiques stables des dynamiques est un problème dont les techniciens savent parfaitement qu'il est d'une extrême difficulté, ce que je ne subodorais pas à l'époque. C'est d'ailleurs peut-être une bonne chose : si l'on connaissait toutes les difficultés d'un problème, en général on ne ferait rien.

Je savais évidemment que l'on ne pouvait pas espérer avoir uniquement des points et des trajectoires fermées, qu'il y avait des objets plus compliqués, contenant éventuellement des ensembles du type Cantor, qui pouvaient se présenter comme ensembles limites. Cela m'a conduit dans mon livre à distinguer ce que j'ai appelé les catastrophes élémentaires, qui sont essentiellement les catastrophes de dynamique de gradient, et les catastrophes généralisées qui sont les catastrophes dynamiques sans aucune contrainte. Malheureusement, au bout de peu de temps, je crois même déjà dans les années 64, Smale a montré dans ses travaux de dynamique qualitative que la stabilité structurelle n'est pas une propriété dense dans l'espace des dynamiques, c'est-à-dire que l'on ne peut pas espérer que presque toute dynamique soit structurellement stable, dans une variété de dimension supérieure à trois. Autrement dit, le phénomène présenté par le théorème de Peixoto pour les surfaces orientables compactes est un phénomène de basse dimension et ne se généralise pas aux dimensions supérieures. Ce résultat a été une espèce de catastrophe pour ma vision des choses et, effectivement, la notion d'attracteur est un peu restée depuis une espèce de bouteille à encre de la dynamique qualitative. C'est je crois une notion tout à fait fondamentale, mais sa définition même est encore actuellement passablement problématique.

Ceci simplement pour dire que, au départ, la théorie de la stabilité structurelle m'avait paru d'une telle ampleur et d'une telle généralité, qu'avec elle je pouvais espérer en quelque sorte remplacer la thermodynamique par la géométrie, géométriser en un certain sens la thermodynamique, éliminer des considérations thermodynamiques tous les aspects à caractère mesurable et stochastiques pour ne conserver que la caractérisation géométrique correspondante des attracteurs. Il est certain que les phénomènes d'instabilité des attracteurs qu'on a découverts depuis montrent qu'un tel espoir est faux ou, en tout cas qu'il faudrait modifier profondément la notion de stabilité structurelle en l'affaiblissant de manière considérable. On a beaucoup travaillé à ce genre d'affaiblissement, mais sans avoir apparemment trouvé jusqu'à présent la bonne conceptualisation.

Qu'en conclure? Eh bien, dans mon livre, quand j'ai proposé le schéma général de la théorie des catastrophes, l'idée était très simple. On a un milieu qui est le siège d'un processus, de quelque nature que ce soit, et l'on distingue deux types de points, les points réguliers et les points catastrophiques. Les points réguliers sont les points où l'analyse phénoménologique locale ne décèle aucun accident particulier; il peut y avoir des variations observables, mais ces variations sont continues. Au contraire, il y a des points où l'analyse phénoménologique révèle des accidents brutaux et discontinus, en particulier des discontinuités observables et c'est ce que j'appelle les points catastrophiques. Dans mon livre, j'ai essayé d'établir que. sous des hypothèses de généricité pour la dvnamique, les points catastrophiques ne pouvaient pas être trop mauvais, que leur structure était passablement régulière, par exemple localement polyédrale ou localement semialgébrique. On peut établir ce genre de théorèmes si l'on fait des hypothèses assez strictes sur la dynamique, par exemple si la dynamique est une dynamique de gradient. Bien entendu, la plupart des dynamiques ne sont pas des dynamiques de gradient et on peut se demander dans quelle mesure ces théorèmes subsistent pour une dynamique générale. Je répète qu'il y a des cas de basse dimension où c'est le cas mais que, par contre, dès qu'on arrive à des dimensions trois ou quatre, en général l'ensemble des points catastrophiques peut devenir partout dense et peut présenter toutes espèces d'ignominies. De sorte que, de ce point de vue-là, la théorie des catastrophes généralisées s'est heurtée à une difficulté de principe due au fait que la stabilité structurelle est une notion trop précise et trop fine pour les applications. Je crois que, à l'heure qu'il est, on n'a pas encore levé cette difficulté. Alors les opposants à la théorie des catastrophes utilisent cet argument pour dire que c'est une théorie qui n'est pas bien fondée mathématiquement puisqu'elle fait appel à des hypothèses sur la dynamique qui ne sont pas vérifiées en général. Personnellement, je ne suis pas trop inquiet à l'égard de ces objections parce que, très probablement, il y a beaucoup de cas où un affaiblissement convenable de la notion de stabilité structurelle pourra conduire à une théorie de la bifurcation qui, à nouveau, va se trouver soumise aux mêmes contraintes que le cas des dynamiques de gradient, c'est-à-dire à la théorie des catastrophes élémentaires. C'est un peu pour moi un acte de foi, bien entendu, mais je pense qu'il est assez justifié.

Je crois que je vais m'arrêter là dans ces considérations techniques. En poursuivant l'historique, je dirai que, dans les années 70, quand mon livre a eu sa carrière souterraine, à Warwick, la théorie des catastrophes a trouvé une nouvelle formulation beaucoup plus générale. Christopher Zeeman a proposé de l'appliquer aux systèmes quelconques, c'est-à-dire aux boîtes noires définies par une correspondance entre des entrées et des sorties. Supposez que votre boîte noire fonctionne en temps discret. Aux temps $t = 0, 1 \ldots, n$, vous fixez la valeur de l'entrée et le système répond par une sortie. Vous formez l'espace produit des entrées par les sorties et, à chaque instant n, vous récoltez un point qui décrit la correspondance de l'entrée et de la sortie, de sorte que tout le comportement du système est décrit par un nuage de points qui constitue ce qu'on appelle une *histoire* du système. Le problème de la théorie générale des systèmes, dans la mesure où elle existe, serait alors, étant donné tous les nuages de points associés à toutes les histoires possibles d'un système, de reconstituer les mécanismes intérieurs à la boîte noire. Il se trouve que dans certains cas on peut le faire, et en particulier dans les cas que l'on considère dans la théorie des catastrophes élémentaires. A chaque valeur de l'entrée ne correspond qu'un nombre fini de sorties, et l'on obtient ainsi une caractéristique de type fini qui, dans beaucoup de cas, pourra être entièrement interprétée par l'algorithme des catastrophes élémentaires. Dans la terminologie de Zeeman, l'espace des entrées devient l'espace de contrôle et, au lieu d'avoir un espace de sortie, on a un espace des états internes que l'on s'efforce de reconstituer à partir des sorties ou par une connaissance explicite du système.

Ceci a constitué évidemment une généralisation extrêmement importante de la théorie des catastrophes et a conduit Zeeman et son école à proposer toute une série de modèles, en particulier en sciences humaines : en éthologie l'agressivité du chien, en économie le modèle du krach boursier, en sociologie le modèle de la mutinerie dans les prisons, etc. Vous pouvez consulter le livre de Christopher Zeeman "Catastrophe Theory".

C'est dans les années 74 que la théorie des catastrophes a été révélée au grand public après les brillantes conférences de Christopher Zeeman au Congrès de mathématiques de Vancouver. Les mass media la présentèrent sous une forme d'ailleurs assez souvent très exagérée, comme ils le font toujours en créant du volume autour des choses dont ils rendent compte. À la suite de ces développements considérables de publicité il y a eu dans les années 76-77 une réaction (ce qu'on appelle en anglais *backlash reaction*) où un certain nombre d'opposants sont venus dire que les prétentions affichées par les tenants de la théorie des catastrophes étaient tout à fait mal fondées et ne reposaient sur rien.

Je pense quant à moi qu'il y avait là effectivement un problème extrêmement sérieux. Au départ, quand Christopher Zeeman et moi nous sommes lancés dans cette affaire, nous n'avions pas une idée extrêmement précise des possibilités de l'outil : on récolte tout d'un coup un outil, on s'en sert, mais on ne sait pas très bien ce qu'il va donner et dans quelles conditions on peut l'appliquer. De ce point de vue, une certaine partie des critiques qui ont été faites dans les années 76-77 sont parfaitement fondées. Le point essentiel est celui qui est justement évoqué dans l'exposé d'introduction de Petitot[2] : la distinction entre les deux manières d'utiliser la théorie des catastrophes. Dans la première manière on part d'un modèle dynamique qui est donné explicitement par des lois et des principes dynamiques déjà connus, et l'on fait une distinction entre dynamique lente et dynamique rapide qui permet d'appliquer les algorithmes de la théorie des catastrophes, qui sont d'ailleurs assez souvent des algorithmes de ce qu'on appelle la théorie des perturbations singulières. Dans ce cas-là, on retombe sur des modèles parfaitement canoniques et classiques, et je ne pense pas que personne puisse objecter à leur emploi. La deuxième manière d'utiliser la théorie des catastrophes est celle que j'ai moi-même suggérée dans mon livre. C'est de partir de la phénoménologie des catastrophes, et d'essayer de reconstituer en quelque sorte la dynamique de complexité minimale qui peut engendrer cet ensemble de catastrophes. Cette deuxième voie de la théorie des catastrophes, du point de vue sociologique, n'a pas eu beaucoup de succès, c'est le moins qu'on puisse dire. Je pense qu'à l'heure actuelle elle n'est pas encore acceptée par la collectivité scientifique. Pour quelles raisons? D'abord, je pense, parce que c'est une méthode qui, en général, n'a aucun pouvoir prédictif. Pour avoir un pouvoir prédictif, pour avoir vraiment une capacité opérationnelle, il faudrait qu'elle soit en mesure de déboucher quand même sur un aspect quantitatif. Or les modèles de la théorie des catastrophes élémentaires sont purement qualitatifs. Ils ne sont définis qu'à un isomorphisme près et, par conséquent, si on ne dispose pas d'autres renseignements qui permettent de borner localement les dérivées de ces isomorphismes, on n'a aucune possibilité d'en tirer des seuils quantitatifs. De ce point de vue, la théorie des catastrophes n'a pas de possibilité pragmatique. C'est évidemment une grave lacune pour des gens qui espéraient en tirer des outils, mais personnellement, je n'en suis pas tellement étonné car il n'est pas au pouvoir de la mathématique de créer des lois là où il n'y en a pas. Quand on est dans une situation phénoménologique où il n'y a pas de lois quantitatives explicites, ce ne sont pas les mathématiciens qui pourront les mettre en évidence. Il faut procéder à une analyse plus fine de la situation, faire appel peut-être à des arguments a priori comme dans le cas de la physique. Il ne faut pas se dissimuler en effet qu'une bonne partie des lois de la physique sont liées à des exigences de symétrie globale qui sont en quelque sorte imposées a priori. L'expérience vérifie ces exigences et elle est bonne fille à cet égard puisqu'elle va jusqu'à 10^{-17} dans certains cas, peut-être même davantage. Mais le miracle de la physique est à mon avis exceptionnel et il n'y a aucune raison d'espérer qu'il va se renouveler dans d'autres disciplines. Les modèles qu'on peut construire pour celles-ci n'ont donc pas en général de capacité prédictive. Christopher Zeeman a peut-être une opinion plus optimiste. Personnellement, je pense que ces modèles peuvent avoir une valeur empirique et une capacité prédictive analogues à celles d'une formule d'interpolation d'une fonction empirique par un polynôme, mais pas plus.

Alors, qu'est-ce qui reste? Après cette controverse, on en est arrivé à la conclusion qu'il y avait des situations quantitativement explicites, essentiellement issues de la physique et de la mécanique, où des modèles pouvaient être interprétés via la théorie des catastrophes. Cela a été accepté par la collectivité scientifique. Mais il faut bien voir qu'au fond, la théorie des catastrophes n'apparaît plus guère dans ce schéma, qui n'est plus comme je l'expliquais tout à l'heure qu'un cas particulier de la théorie des perturbations singulières, c'est-à-dire un cas où l'on distingue une dynamique lente et une dynamique rapide, où l'on fait tendre le rapport de ces deux dynamiques vers l'infini, où l'on regarde la situation limite et où l'on essaye de l'approximer en fonction de ce rapport. Il s'agit là d'un type d'algorithmes assez classique mais pour lequel, bien entendu, la théorie des applications différentiables et de la généricité des projections peut aider énormément.

Alors, il reste le deuxième aspect, l'aspect proprement philosophique, la seconde voie que j'ai moi-même utilisée dans mes modèles biologiques, quand j'ai par exemple essayé d'exploiter l'idée de Max Delbruck que la différenciation cellulaire pouvait être traitée sur le modèle d'une transition de phases. Il faut dire que ces modèles que j'ai proposés n'ont pas eu un grand succès sociologique. En biologie on les a pratiquement ignorés, et je pense même que beaucoup de mes collègues mathématiciens estiment que je me suis largement égaré dans ce genre de considérations. Certains l'ont dit explicitement. L'opinion des mathématiciens ne m'importe pas tellement dans ce domaine parce que, quand on n'a pas étudié une question en elle-même, on a souvent des idées a priori. Le mathématicien qui écoute les biologistes, qui lit les journaux, apprend que tout dans la biologie est une affaire d'A.D.N. et que si on ne sait pas décoder l'A.D.N. on ne sait rien faire en biologie. Comme il vit sur cette idée, bien évidemment, des modèles où l'A.D.N. n'intervient pas explicitement lui sembleront a priori complètement farfelus et dépourvus d'intérêt. Il y a là un problème méthodologique qu'il faudra bien aborder un jour et dont Petitot a parlé dans son introduction[2].

Sur la seconde voie encore. Vers les années 70-71, j'ai commencé à m'intéresser à la linguistique. Déjà dans mon livre j'avais envisagé une possibilité d'interprétation géométrique de certains concepts, par exemple le concept de capture. Le fait de pouvoir en quelque sorte réaliser par des structures algébriques relativement simples des concepts a priori sémantiquement complexes comme ceux de "capturer", de "briser", ou de "lier" m'a amené à proposer une théorie générale des interactions entre objets spatiaux, des processus spatio-temporels qu'on peut décrire linguistiquement. Je continue à penser que c'est une idée valable, bien que, là aussi, sur le plan sociologique, elle n'ait eu que très peu d'échos chez les linguistes, la corporation des linguistes m'ayant paru à cet égard encore plus bornée que celle des biologistes. Linguistes et biologistes ont d'ailleurs peut-être quelque chose en commun. C'est qu'ils s'occupent tous deux de structures de surface et qu'ils n'ont pas en général une idée très nette des structures profondes. Qu'en face d'une morphologie complexe comme la morphologie de l'embryologie ou la morphologie linguistique il faille faire appel à des mécanismes profonds sous-jacents pouvant être exprimés par une algèbre pas tellement compliquée, c'est là une idée que, en un certain sens, ils ont rejetée a priori.

Ensuite, pour en terminer avec mon évolution en matière de théorie des catastrophes et d'applications, il y a eu mon travail sur la sémiotique. Dans l'article "De l'icône au symbole" publié en 71 dans *Les Cahiers du Symbolisme*, j'ai essayé d'attaquer le problème de la correspondance signifié/signifiant d'un point de vue dynamique, en tenant compte des contraintes spatio-temporelles qui relient le signifié au signifiant, chose que, évidemment, les sémioticiens qui sont des gens de formation logique avaient royalement ignorée. L'idée qu'on ne pouvait traiter abstraitement de la correspondance entre signifié et signifiant sans tenir compte de la localisation spatio-temporelle des événements correspondants, a été quelque chose d'assez nouveau en sémiotique et je crois que cet article de ce point de vue-là a apporté des éléments neufs, éléments que d'ailleurs j'ai développés par la suite et qui sont à la source des notions de saillance et de prégnance.

Je dois également signaler que j'ai aussi écrit un article sur la tectonique des plaques dans les années 79, article qui n'a pas suscité non plus une extrême attention de la part des spécialistes. Probablement ne l'ont-ils pas compris. Puis, pour en terminer vraiment avec les parties les plus extrêmes de mon évolution, j'ai écrit récemment un article d'esthétique intitulé “Local et global dans l'œuvre d'art” où j'essaye d'interpréter l'origine de la satisfaction esthétique dans le cas d'une représentation picturale. Il ne s'agit pas là réellement de catastrophe au sens strict parce que, dans l'effet esthétique, le phénomène intéressant est son extrême sensitivité par rapport aux déformations : si vous prenez un tableau, si vous déformez légèrement une courbe d'un sujet, ou une couleur, vous pouvez détruire dans une large mesure l'effet esthétique. Ce qui est donc intéressant à expliciter dans l'esthétique c'est cette sensitivité. Et là aussi j'ai proposé quelques idées.

Je voudrais dire pour terminer comment je vois actuellement ce qui fait l'importance de la théorie des catastrophes. En métaphysique, on a d'abord le fameux problème considéré par Heidegger : pourquoi y a-t-il quelque chose plutôt que rien? Je ne vais pas m'en occuper. Je vais simplement supposer qu'il y a quelque chose, hypothèse assez raisonnable après tout. On se trouve alors tout de suite affronté au problème de l'unité et de la diversité. Il y a quelque chose, et ce quelque chose est en quelque sorte un tout, donc il a une certaine unité, mais, d'un autre côté, il y a des apparences multiples, une multitude d'aspects, donc il y a diversité. Symbolisé par les deux noms opposés de Parménide et d'Héraclite, le problème est donc d'expliquer les rapports entre unité et diversité. À la suite de la théorie des catastrophes, je me suis cru héraclitéen : tout fuit, il y a de la dynamique partout, et nous ne voyons que les catastrophes de cette dynamique. C'est vrai, mais il faut bien se rendre compte qu Héraclite avait une idée très nette du fait que l'univers avait de la stabilité. C'est je crois dans le concept de *logos* qu'il l'a exprimé : chaque chose a son logos et ce logos de chaque chose est le principe de sa stabilité. Dans le cas d'une dynamique structurellement stable, le logos est si vous voulez la configuration qui la rend précisément structurellement stable. Avec la notion de logos, Héraclite peut à la fois tenir compte de la diversité des choses et récupérer une certaine unité puisque la même dynamique peut subir des déformations conduisant à des catastrophes phénoménologiques. A ce propos, je voudrais ouvrir une petite parenthèse terminologique. Pour moi, le concept de catastrophe est un concept de phénoménologie, ce n'est pas un concept de mathématique. On voit des choses qui se passent. Au contraire, le concept de bifurcation est un concept de mathématique lié à un certain formalisme.

Il faut bien faire cette distinction. Beaucoup d'auteurs ne la font pas, ce qui crée une certaine confusion. Donc Héraclite peut avoir une dynamique universelle, mais cette dynamique, par ses bifurcations locales, peut engendrer des catastrophes qui conduisent à des objets perceptibles et permanents, ou au moins localement permanents.

D'un autre côté, Parménide lui aussi, bien que préconisant l'unité de toute chose, se rend bien compte qu'il y a beaucoup de mouvement et de diversité. Mais il rejette cela d'un geste dédaigneux dans l'apparence, la doxa. Je crois qu'on peut dire que l'attitude de Parménide n'est plus de mise aujourd'hui car si nous aussi nous acceptons les apparences, nous essayons cependant de fonder la réalité sur leur examen. Mais qu'est-ce qu'une apparence ? C'est une entité fictive et cachée qui cause l'apparence. je n'ose pas dire le noumène kantien ; et puis il y a l'observateur. L'apparence est donc une fonction simultanée de l'objet théorique sous-jacent et du point de vue de l'observateur. L'objet théorique sous-jacent nous ne le connaissons pas toujours et même, en général, nous ne le connaissons pas. En revanche, le point de vue de l'observateur, lui, nous pouvons parfois le contrôler assez strictement. En physique on s'en est tiré en posant que le point de vue de l'observateur est tout bêtement un repère et en plongeant ce repère dans un espace de points de vue. Si donc on connaît les lois des transformations des apparences en fonction des transformations du repère, on aura établi les invariants correspondants aux objets qui engendrent les apparences. Toute la physique contemporaine est fondée sur cette idée : les changements de repère constituent un groupe de Lie, ce groupe de Lie agit dans un espace auxiliaire qui définit les apparences qui nous intéressent, et une fois qu'on a défini la représentation de ce groupe de Lie dans cet espace d'apparences, on a tout ce qu'il nous faut, on a toutes les lois quantitatives nécessaires pourvu que la représentation soit analytique (ce qui est le cas en dépit du fait que le groupe soit non compact en général : tout se passe comme s'il était compact car on ne s'occupe pas trop de ce qui se passe à l'infini et, de ce fait, les représentations sont analytiques). Tout le formalisme quantitatif traditionnel de la physique est issu de là, et son pouvoir prédictif. Mais dans des situations plus macroscopiques, on doit considérer que le point de vue de l'observateur peut dépendre éventuellement de paramètres plus qualitatifs que simplement une position et une vitesse. Sur l'espace de contrôle des positions possibles de l'observateur, à chaque position correspond une apparence c'est-à-dire un certain ensemble de catastrophes dans un espace phénoménologique. Le problème de la construction de la réalité devient à ce moment-là l'étude des variations des apparences en fonction des variations de l'observateur. On essaye d'en isoler les lois et si on peut exprimer celles-ci de manière suffisamment simple, par exemple en termes différentiables, pour qu'on puisse reconstituer un objet central qui engendre toutes ces apparences, alors on aura gagné.

La problématique fondamentale à cet égard est tout bêtement celle du contour apparent : à chaque position de l'observateur regardant un objet, correspond sur sa rétine un certain contour apparent; s'il se déplace, le contour apparent change, quelquefois brutalement, qualitativement, pour certaines positions; et il s'agit de reconstruire l'objet initial à partir de ses contours apparents. Personnellement, je suis tenté de penser que c'est là un des aspects fondamentaux de la construction du réel scientifique : l'objet d'un consensus, c'est finalement la construction d'un objet à partir de ses apparences, d'un objet théorique à partir de ses apparences immédiates.

Pour en revenir à la théorie des catastrophes, je disais tout à l'heure que les mathématiciens sont mal partis sociologiquement parce qu'ils ne sont jamais considérés à l'égal des physiciens. Je pense que, dans le cas de la théorie des catastrophes élémentaires, il y a un objet mathématique qui est relativement neuf, qui joue un rôle central, et dont il y a tout lieu de penser qu'il va continuer à jouer un rôle dans la théorie de la bifurcation dans la mesure où elle sera une théorie descriptible. Il s'agit d'une nouvelle forme du prolongement analytique. Je parlais de Riemann tout à l'heure. Riemann est le premier à avoir défini le prolongement analytique : quand vous avez une fonction holomorphe, une fonction définie au voisinage d'un point par son développement en série de Taylor, vous pouvez prendre un autre point à l'intérieur du disque de convergence, développer la fonction par rapport à ce point, obtenir un nouveau disque de convergence et ainsi de suite. Cet algorithme de prolongement analytique est fondamental car toutes les possibilités de prédiction quantitative en science reposent en dernière analyse sur lui. Pour fonctionner, il exige qu'on ait au départ un germe de fonction plongé dans un espace analytique donné d'avance. C'est dire qu'il faut quand même avoir une donnée globale. Il n'y a pas de prolongement analytique d'un germe défini intrinsèquement. Ici je parle, pour les mathématiciens, d'un fait qui ne m'est apparu que tout récemment et que je crois tout à fait important. Si vous vous donnez un germe d'ensemble analytique, il n'y a pas de prolongement analytique standard maximal de ce germe. Ceci n'a pas de sens, du moins à ma connaissance.

Par contre, il y a la notion, qui a été dégagée récemment par les spécialistes de géométrie analytique, de déformation plate maximale d'un germe d'ensemble analytique. Si on a un germe d'ensemble analytique, on peut le déformer en déformant ses équations. Il y a des restrictions – dites de platitude – à imposer à ces déformations. Je ne peux pas m'y étendre ici, mais ceci permet de déployer toutes les virtualités contenues dans un germe dégénéré en un espace contenant des réalisations moins dégénérées du germe initial. C'est là je crois une idée essentielle, sous-jacente à la théorie des catastrophes, l'idée aristotélicienne du passage de la puissance à l'acte, qui se trouve réalisée mathématiquement dans cet algorithme de déploiement d'un germe dégénéré en une famille de germes maximale : le germe dégénéré est en quelque sorte une structure virtuelle et quand vous constituez son déploiement, sa déformation universelle, vous obtenez un panorama de toutes les réalisations actuelles possibles de sa virtualité. Je pense que c'est peut-être là un des acquis majeurs qui seront utilisés, en dépit du fait que cette transformation purement locale n'est définie qu'à un isomorphisme près et par suite ne se prête pas par elle-même à une exploitation quantitative. Mais elle permet une description qualitative du passage du virtuel à l'actuel. C'est là le point philosophique essentiel apporté par la théorie des catastrophes élémentaires et je crois qu'il en restera toujours quelque chose.

Références

[1] R. Thom, *Logos et théorie des catastrophes*, Colloque de Cerisy à partir de l'œuvre de René Thom (1982), p. 23.

[2] J. Petitot, id. p. 41